Perrin

Developpement :
Simplicité de A_n, $n \geq 5$

leçons 103 105 104 108

Théorème : Pour $n \geq 5$, A_n est simple.

Preuve : Fixons $n \geq 5$ et commençons par prouver le lemme suivant :

Lemme :
i) A_n est engendré par les 3-cycles
ii) Les 3-cycles sont conjugués dans A_n

Preuve

i) Notons G le groupe engendré par les 3-cycles. Tout 3-cycle a une signature égale à 1, donc $G \subset A_n$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $\sigma \in A_n$. Considérons $\prod_{i=1}^{p} \tau_i$ la décomposition en produit de transpositions de σ. $\varepsilon(\sigma) = 1$ donc p est pair. Remarquons que pour tout i, j, k, l distincts, on a $(i\,j)(k\,l) = (i\,j\,k)(j\,k\,l)$

$$(i\,j)(k\,i) = (i\,k\,j)$$

Donc le produit de deux transpositions distinctes est un 3-cycle. Donc σ s'écrit comme produit de $\frac{p}{2}$ 3 cycles. Ainsi $\sigma \in G$.
Ainsi $G = A_n$.

ii) Les 3-cycles sont conjugués dans S_n. Donc pour a, b, c distincts, puis pour d, e, f distincts, $\exists\, \sigma \in S_n$ tq $\sigma (a\,b\,c)\, \sigma^{-1} = (d\,e\,f)$.
Si $\sigma \in A_n$, c'est bon. Sinon, comme $n \geq 5$, on peut choisir i, j distincts de a, b, c tq $\sigma' = \sigma (i\,j) \in A_n$, et alors $\sigma' (a\,b\,c)\, \sigma'^{-1} = (d\,e\,f)$ et les 3-cycles sont donc conjugués dans A_n. $\blacksquare$

Considérons H un sous groupe distingué de A_n, $H \neq \{Id\}$. Par le lemme, il suffit de mq H possède un 3-cycle.

Soit $\sigma \in H \setminus \{Id\}$, soit a tq $b = \sigma(a) \neq a$. Fixons $c \notin \{a, b, \sigma(b)\}$ (c existe car $n \geq 5$) et considérons le 3-cycle $\gamma = (a\ b\ c)$
et la permutation $\sigma_2 = \sigma \gamma \sigma^{-1} \gamma^{-1}$

$\sigma_2 \in H$ car $\sigma \in H$ et $\gamma \sigma^{-1} \sigma^{-1} \in H$. De plus, on vérifie que $\sigma_2 = (b\ \sigma(b)\ \sigma(c))(a\ c\ b)$. ($\sigma_2 = (\sigma \gamma \sigma^{-1}) \gamma^{-1}$ et formule de composition)

Décomposons σ_2 en produit de cycles à support disjoints en remarquant que $supp(\sigma_2) \subset \{a, b, c\,;\, \sigma(c)\,;\, \sigma(b)\}$ a au plus 5 éléments. En raisonnant sur le type de σ_2, seuls les cas suivants se produisent:
($\sigma_2 \in H \subset A_n$ donc impossible d'être $(3)(2)$ ou $(4)(1)$, de $sgn = -1$)

$(1,1,1,1,1)$ Si $\sigma_2 = Id$, σ et γ commutent, ce qui est faux car $\sigma\gamma(a) = \sigma(b) \neq \gamma\sigma(a)$ par construction de c.

$(2,2,1)$ Si $\sigma_2 = (i\,j)(k\,l)$, alors $\sigma_3 = (i\,j\,k\,l\,m)\sigma_2(i\,j\,k\,l\,m)^{-1}\sigma_2^{-1} \in H$ car H est distingué dans A_n. Par calcul, $\sigma_3 = (i\,j\,k\,l\,m)(j\,i\,l\,k\,m)^{-1}$
$= (i\,k\,m\,l\,j)$
et on se ramène à (5)

$(3,1,1)$ Si σ_2 est un 3-cycle, c'est bon

(5) Si $\sigma_2 = (i\,j\,k\,l\,m)$, alors $\sigma_3 = (i\,j\,k)\,\sigma_2\,(i\,j\,k)^{-1}\sigma_2^{-1} \in H$ et on a $\sigma_3 = (i\,j\,k)(j\,l\,k) = (i\,j\,l)$.

Dans tous les cas, on a trouvé un 3-cycle dans H. Ainsi $H = A_n$. (et A_n est donc simple). ∎

Question :

① Si $n = 3$?

Alors $A_n = A_3 = \{ Id, (123), (132) \} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ est simple.

② si $n = 4$?

$A_4 = \{ Id, \text{3-cycles}, \text{double transpo} \}$ n'est pas simple car le groupe des double transposition est distingué dans A_n.

{ De plus, les 3-cycles ne sont pas conjugués, car sinon on aurait $8 \mid |A_4|(=12)$ ce qui est faux }.